



# Instabilités de frottement : Approches temporelle et fréquentielle

A. Meziane, Laurent Baillet, Bernard Laulagnet

## ► To cite this version:

A. Meziane, Laurent Baillet, Bernard Laulagnet. Instabilités de frottement : Approches temporelle et fréquentielle. XVIème Congrès Vibrations Chocs et Bruit, 2006, Lyon, France. pp. 25. insu-00355505

**HAL Id: insu-00355505**

**<https://hal-insu.archives-ouvertes.fr/insu-00355505>**

Submitted on 22 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INSTABILITES DE FROTTEMENT : APPROCHES TEMPORELLE ET FREQUENTIELLE

## FRICTION-INDUCED INSTABILITIES: MODAL AND TEMPORAL APPROACHES

Anissa MEZIANE<sup>1\*</sup>, Laurent BAILLET<sup>2</sup>, Bernard LAULAGNET<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides*, INSA-Lyon 20, Avenue Albert

Einstein 69621 Villeurbanne, France

Email : [anissa.meziane@insa-lyon.fr](mailto:anissa.meziane@insa-lyon.fr)

Tel : 04-72-43-84-45

<sup>2</sup> *Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique*, Université Joseph Fourier-

CNRS, B. P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

Email : [laurent.baillet@ujf-grenoble.fr](mailto:laurent.baillet@ujf-grenoble.fr)

Tel : 04-76-82-80-50

<sup>3</sup> *Laboratoire de Vibrations et Acoustique*, INSA-Lyon 20, Avenue Albert Einstein 69621

Villeurbanne, France

Email : [bernard.laulagnet@insa-lyon.fr](mailto:bernard.laulagnet@insa-lyon.fr)

Tel : 04-72-43-82-75

(\* Correspondant)

# INSTABILITES DE FROTTEMENT : APPROCHES TEMPORELLE ET FREQUENTIELLE

## Résumé

Les instabilités induites par frottement sont responsables des divers bruits induits tels que le crissement, le sifflement ou le broutement ... Pour modéliser et comprendre le phénomène d'instabilités induites par frottement, les approches temporelle et fréquentielle sont comparées dans cet article. Cette analyse est effectuée à partir d'un système modèle constitué de deux poutres en contact. Même si les deux approches utilisent la méthode des Eléments Finis, la gestion du contact y est traitée différemment. L'approche fréquentielle consiste à calculer les valeurs propres du système couplé par frottement. L'instabilité se manifeste par la coalescence de deux modes. Plusieurs modes sont potentiellement instables. L'approche temporelle, quant à elle, donne l'évolution des quantités en fonction du temps. L'instabilité apparaît lorsque des zones d'adhérence ou de décollement apparaissent au niveau du contact. Grâce à cette approche, on obtient la ou les fréquences qui caractérisent l'instabilité. Les résultats issus des deux approches sont cohérents et complémentaires.

**Mots clés : instabilités de frottement / crissement / contact / dynamique /  
Eléments Finis**

# FRICION-INDUCED INSTABILITIES: MODAL AND TEMPORAL APPROACHES

## **Abstract**

The vibrations generated at the interface between the two bodies in friction are responsible for various noises such as squealing, juddering, hammering, hooting, etc... In order to model and understand friction-induced vibration phenomenon, two approaches are compared in this article: temporal approach and modal approach. This analysis has been made on a simplified system composed of two beams in contact. The two different approaches have been programmed using Finite Element method. Assumptions on the contact calculation are different for the two approaches. Modal approach consists in calculating eigenvalues of the friction coupled system. Instabilities appear when a pair of modes merges. Eigenvalues with positive real parts are identified as potentially unstable modes. Temporal approach calculates the evolution of displacements, velocities, accelerations, forces ... One speaks about instabilities when stick or separation zones appear in the contact surfaces. With this approach frequencies which are excited during instability are obtained. Results have been compared and both methods give coherent and complementary results.

**Key words:** friction-induced instabilities / squeal / contact / Dynamics /

**Finite Elements**

## Nomenclature

|   |   |
|---|---|
| <b>C</b>  | Matrice d'amortissement du système (Ns.m <sup>-1</sup> )                                    |
| <b>F</b>  | Valeur absolue de la force appliquée sur la poutre 1 (N)                                    |
| <b>f</b>  | Vecteur des forces extérieures nodales du système (N)                                       |
| <i>f</i>  | Fréquence propre du système (Hz)  |
| <b>G</b>  | Matrice globale de contraintes en déplacement   |
| <b>K</b>  | Matrice de raideur du système (N.m <sup>-1</sup> )  |
| <b>K<sup>c</sup></b>                                  | Matrice de raideur du système avec contact (N.m <sup>-1</sup> )                             |
| <b>K<sub>c</sub></b>                                  | Raideur de contact (N.m <sup>-1</sup> )   |
| <b>L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub></b>                   | Longueur respectivement de la poutre 1 et de la poutre 2 (m)                                |
| <b>M</b>  | Matrice de masse du système (kg)  |
| <i>t, Δt</i>  | Temps (s), Pas de temps (s)   |
| <b>u, <math>\dot{u}</math>, <math>\ddot{u}</math></b> | Vecteurs déplacement (m), vitesse (m.s <sup>-1</sup> ) et accélération (m.s <sup>-2</sup> ) |
| <b>V</b>  | Valeur absolue de la vitesse imposée à la poutre 2 (m.s <sup>-1</sup> )                     |
| <b>x</b>  | Vecteur des coordonnées du système (m)  |
| <b><math>\alpha_1, \alpha_2</math></b>                | Paramètres d'amortissement proportionnel (s <sup>-1</sup> , s)                              |
| <b><math>\beta</math></b>                             | Angle relatif entre les deux poutres (°)  |
| <b><math>\beta_2</math></b>                           | Paramètre d'amortissement numérique   |
| <b><math>\varepsilon</math></b>                       | Taux d'amortissement  |
| <b><math>\varphi</math></b>                           | Valeur propre du système matriciel  |
| <b><math>\lambda</math></b>                           | Vecteur forces de contact (N)   |

|          |   |
|----------|---|
| $\mu$    | Coefficient de frottement de Coulomb    |
| $\omega$ | Pulsation propre (rad.s <sup>-1</sup> ) |

## Indices

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| n   | Relatif à l'instant $t$            |
| n+1 | Relatif à l'instant $t + \Delta t$ |
| n-1 | Relatif à l'instant $t - \Delta t$ |

## Exposant

|           |  |
|-----------|--|
| $\vec{n}$ | Selon la normale                           |
| $\vec{t}$ | Selon la tangentielle                      |
| T         | Transposée                                 |
| *         | Sans prise en compte des forces de contact |

## Introduction

Les vibrations induites par frottement ou instabilités de frottement apparaissant à l'interface entre deux corps frottant sont responsables de divers bruits et de concentration de contraintes. Un vaste panorama de la dynamique de vibrations induites par frottement est présenté par Ibrahim [1-2]. Akay [3] présente une vue d'ensemble de l'acoustique du frottement.

Les études sur ce problème ont débuté dans les années 1930. En 1938, Mills [4] effectue une des premières études sur le phénomène de crissement de frein. Il montre que des instabilités de frottement peuvent apparaître lorsque le coefficient de frottement décroît avec la vitesse relative. Block [5] complète cette théorie en montrant que ces vibrations instables peuvent également être obtenues lorsque le coefficient de frottement statique est supérieur au coefficient de frottement dynamique. En 1961, Spurr [6] développe le modèle de « Sprag-Slip ». Il montre l'importance de la cinématique de contact en obtenant une condition d'instabilité sur l'angle d'attaque du contact avec un coefficient de frottement constant.

D'autres modèles ont été développés : des modélisations en systèmes discrets (North [7], Nishiwaki [8], Rudolph et Popp [9]), des modélisations en plaques (Ouyang and al. [10], Flint et Hultén [11]) et des modélisations éléments finis (Chan et Mottershead [12], Giannini [13]). Dans ces études numériques basées sur une approche fréquentielle, les modes et valeurs propres du système couplé constitué par les deux corps en contact sont calculés. L'instabilité, caractérisée par la coalescence de deux modes qui deviennent complexes, est appelée instabilité par flottement. Tous ces modèles montrent que l'apparition

d'instabilités peut être le résultat d'un ou plusieurs phénomènes. Pour comprendre la dynamique locale de contact [14], l'approche fréquentielle est insuffisante puisqu'elle ne permet pas de connaître le comportement du système pendant l'instabilité. En revanche, l'approche temporelle permet l'étude de l'évolution des grandeurs mécaniques (contraintes, déformations) en fonction du temps. Cette approche non linéaire est utilisée dans les travaux de Oanca et Laursen [15-16], Chern et al. [17], Hendricx et al. [18], Chargin et al [19]. Ils obtiennent, pour les systèmes étudiés, les réponses en temps, permettant de mettre en évidence des comportements instables harmoniques ou parfois chaotiques.

L'objectif de cet article est de présenter et de confronter ces deux approches fréquemment utilisées pour traiter le problème des instabilités de frottement. La complexité du phénomène d'instabilité de frottement mêlée à celle du système étudié rend souvent difficile l'interprétation des résultats obtenus. C'est pourquoi un système modèle (figure 1) a été choisi pour cette étude. Dans un premier temps, la modélisation du système par les deux approches temporelle et fréquentielle est présentée. Les résultats obtenus par chaque approche sont ensuite exposés et confrontés afin de dégager leur domaine de validité.

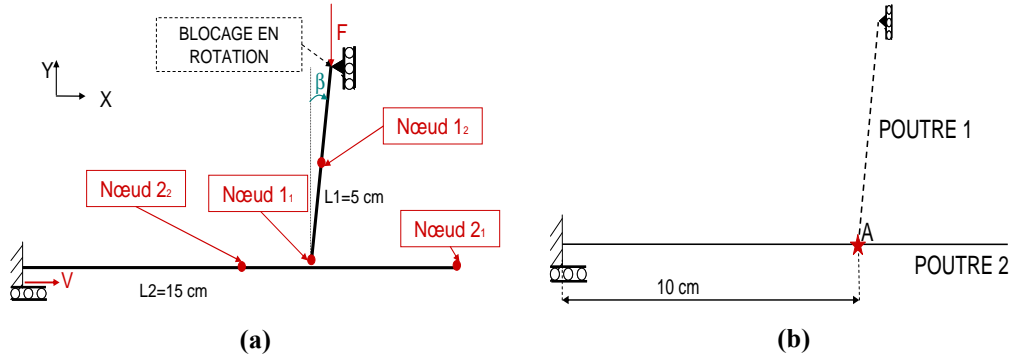
## **1. Modélisation et méthodes numériques utilisées**

### **1.1. Système étudié**

Le système étudié est constitué de deux poutres en contact ponctuel (Figure 1). La poutre 2 est encastrée libre. La poutre 1 a une extrémité bloquée en  $x$  et en rotation et l'autre en contact avec la poutre 2. Une vitesse  $V$  suivant  $x$  est imposée



à la poutre 2 au niveau de l'encastrement et la poutre 1 est maintenue en contact sur la poutre 2 par la force  $F$  appliquée suivant  $y$ .



**Figure 1 : (a) Schéma du système étudié et des nœuds d'étude. (b) Point de contact initial A.**  $\beta$  désigne l'angle de la poutre 1 par rapport à la verticale. Cet angle est appelé angle d'attaque du contact.

## 1.2. Equations de mouvement du système sans contact

La méthode des éléments finis est appliquée au système pour les deux approches utilisées dans cet article. Les éléments considérés sont des poutres de Bernoulli (cisaillement négligé) en flexion et traction-compression (3 degrés de liberté par nœud). On se place dans les hypothèses des éléments finis linéaires de poutres, (petites rotations et les petites déformations). Les équations de mouvement, via le principe des travaux virtuels, sont transformées en un système matriciel linéaire.

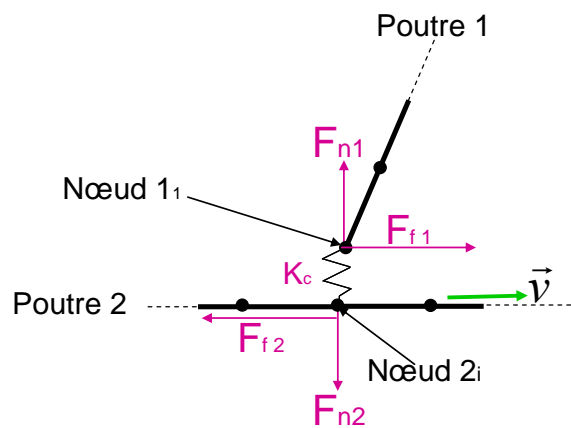
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement proportionnelle de Rayleigh ( $\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{K}$ ) et de raideur.  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  sont respectivement les vecteurs de déplacements nodaux (comprenant les 3 degrés de liberté à chaque nœud), de vitesses nodales et d'accélérations nodales.  $\mathbf{f}$  est le

vecteur des forces extérieures nodales. C'est la même plateforme informatique développée au sein du LaMCoS qui permet de gérer ces différentes matrices. Le contact est géré différemment pour les deux approches fréquentielle et temporelle.

### 1.3. Approche fréquentielle

Le principe de cette approche est de calculer les valeurs et vecteurs propres du système matriciel (1) en intégrant les forces de contact. On suppose que les deux poutres sont en équilibre glissant régi par une loi de Coulomb sans régularisation. Un ressort de raideur  $K_c$  est introduit entre les deux nœuds en contact (figure 2). Le ressort introduit une force normale proportionnelle à la compression du ressort. Comme les deux nœuds sont cinématiquement glissants, la force tangentielle peut également être exprimée en fonction du coefficient de frottement de Coulomb, de la raideur du ressort et des déplacements nodaux.



**Figure 2 : Gestion du contact dans l'approche fréquentielle. Le nœud 2<sub>i</sub> en contact de la poutre 2 correspond dans les résultats présentés au point A.**

Les nœuds 1<sub>1</sub> et 2<sub>i</sub> sont respectivement les nœuds en contact de la poutre 1 et de la poutre 2.  $U_{y1}$  et  $U_{y2}$  représente leur déplacement selon y et  $U_{x1}$  et  $U_{x2}$  leur

déplacement selon X (dans le repère global du système). Les forces normales et tangentielles peuvent s'écrire ainsi :

$$F_{n1} = -K_c (U_{y1} - U_{y2}) = -F_{n2} \quad (2)$$

$$F_{t1} = -\mu K_c (U_{y1} - U_{y2}) = -F_{t2} \quad (3)$$

On obtient l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^c \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u})$  et  $\boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u})$  sont respectivement les vecteurs nodaux des forces normales et tangentielles de contact et  $\mathbf{K}^c$  la matrice de raideur du système incluant les forces de contact.

▪ **Résolution sans amortissement** :

En considérant le système sans amortissement et en posant  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} e^{(j\omega t)}$ , on obtient à partir de l'équation (4) le système suivant :

$$\left( \mathbf{K}^c - \omega^2 \mathbf{M} \right) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

On calcule les valeurs propres  $\varphi_i = \omega_i^2$ ,  $\omega_i$  étant les pulsations propres du système, et les vecteurs propres associés. On peut donc écrire le déplacement dans cette nouvelle base constituée par ces vecteurs propres. Le système est dit instable s'il existe une ou plusieurs pulsations propres possédant une partie imaginaire non nulle, ce qui implique que le déplacement croît exponentiellement en fonction du temps.

▪ **Résolution avec amortissement** :

Si la matrice d'amortissement est non nulle, on pose  $\mathbf{y} = \{\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{u}}\}^T$ . Le système d'équations (4) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^c & 0 \\ 0 & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (6)$$

En posant  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \exp(rt)$ , on obtient :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}} = -r\bar{\mathbf{y}} \quad (7)$$

Les valeurs propres  $\varphi_i$  de  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  sont les racines du problème vibratoire, complexes et conjuguées deux à deux :

$$r_i = -\varphi_i = -\varepsilon_i \omega_i + j \omega_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} \quad (8)$$

où  $\varepsilon_i$  est le taux d'amortissement,  $\omega_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  pulsation propre du système.

Lorsque  $\varepsilon_i$  est négatif, on a une croissance exponentielle en  $y$  et de même que précédemment le système est dit instable.

#### **1.4. Approche temporelle**

Cette approche permet de calculer les différentes valeurs de déplacements, vitesses et accélérations aux différents nœuds, ainsi que les forces et surfaces de contact au cours du temps. Les équations du mouvement sont discrétisées en temps. La couche de troisième corps est remplacée par une loi de frottement de type Coulomb sans régularisation. La gestion du contact avec frottement entre les deux corps déformables est réalisée par des algorithmes basés sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant [20]. L'algorithme de contact est

basé sur l'interaction entre les surfaces maîtres (sur la poutre 2) et le nœud esclave (nœud 1<sub>1</sub> appartenant à la poutre 1). Les segments maîtres élémentaires sont décrits par deux nœuds et approximées par des splines bicubiques de continuité  $C^1$ . La méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant est construite à partir des équations de mouvement (via le principe des travaux virtuels) au temps ( $t_n = n\Delta t$ ) augmentées par les contraintes en déplacements imposées au nœud esclave à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n + \mathbf{G}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_n = \mathbf{f}_n \\ \mathbf{G}_{n+1}(\mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}_n$  est le vecteur des forces de contact du nœud esclave,  $\mathbf{G}_{n+1}$  est la matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires de contraintes en déplacement,  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$  est le vecteur des coordonnées à l'instant  $t_{n+1}$ .  $\mathbf{f}_n$  est le vecteur des forces externes aux nœuds et  $\mathbf{u}_n$  le vecteur déplacement. Les vecteurs  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  sont les vecteurs vitesses et accélérations aux différents nœuds. Les équations de mouvement (9) sont ensuite discrétisées en temps. On choisit un schéma explicite (ce qui suppose que la condition de Courant doit être satisfaite). Les vecteurs  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  sont exprimés à chaque pas de temps  $\Delta t$  à partir du schéma temporel de la méthode  $\beta_2$  ( $\beta_2 \in [0.5;1]$ ) :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{2}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n) \\ \dot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{1+2\beta_2} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{2\beta_2}{\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \right\} \end{cases} \quad (10)$$

Le schéma classique des différences centrées correspond à une valeur de  $\beta_2=0.5$ .

Pour chaque incrément de temps, les nouvelles coordonnées

$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1}^* - \mathbf{u}_n$  des noeuds appartenant à la surface de contact (poutre 1 et 2)

sont calculées en supposant que les forces de contact  $\lambda_n$  sont nulles. Pour

$\beta_2 = 0.5$ , les déplacements nodaux au temps  $t_{n+1}^*$  sont obtenus par:

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{r}_n - \mathbf{K} \mathbf{u}_n) + 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} \quad (11)$$

La matrice globale  $\mathbf{G}_{n+1}$  de contrainte en déplacements est non nulle si le noeud esclave est détecté comme « pénétrant » un segment maître. Cette matrice permet de calculer les forces de contact  $\lambda_n$  et les coordonnées  $\mathbf{x}_{n+1}$  permettant d'éviter que les surfaces de contact s'interpénètrent:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left\{ \Delta t^2 \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T \right\}^{-1} \mathbf{G}_{n+1} (\mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1}^* - \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* - (\Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T \lambda_n) \end{cases} \quad (12)$$

Un algorithme itératif de résolution basé sur la méthode de Gauss – Seidel a été développé pour résoudre l'équation (12). La loi de frottement utilisée ici, pour chaque noeud, est une loi de type Coulomb sans régularisation de la force tangentielle de contact en fonction de la vitesse relative. Les conditions de contact sont données par:

$$\lambda_n^{\bar{n}} \leq 0 \quad (\text{contact si } \lambda_n^{\bar{n}} < 0 \text{ et décollement si } \lambda_n^{\bar{n}} = 0)$$

$$\|\lambda_n^{\bar{t}}\| \leq \mu \|\lambda_n^{\bar{n}}\|$$

- si  $\|\lambda_n^{\bar{t}}\| < \mu \|\lambda_n^{\bar{n}}\|$ ,  $v_t = 0$  (*adhérence*)
- si  $\|\lambda_n^{\bar{t}}\| = \mu \|\lambda_n^{\bar{n}}\|$ ,  $\lambda_n^{\bar{t}} \cdot v_t \leq 0$  (*glissement*)

où  $v_t$  est la vitesse relative tangentielle des nœuds esclaves liés à la surface maître,  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  sont les vecteurs normaux et tangentiels respectivement qui définissent le contact.

## 2. Résultats

### 2.1. Système étudié

Les caractéristiques du système étudié figurent dans le tableau I.

|  | Poutre 1         | Poutre 2         |
|--|------------------|------------------|
| Longueur x Largeur x Epaisseur ( $m^3$ ) | 0.05x0.01x0.0015 | 0.15x0.015x0.003 |
| Module d'Young (GPa)                     | 200              | 200              |
| Masse volumique ( $kg/m^3$ )             | 7800             | 7800             |
| Paramètre $\alpha_1$ (Amortissement)     | 50               | 50               |
| Paramètre $\alpha_2$ (Amortissement)     | $10^{-8}$        | $10^{-8}$        |
| Nombre d'éléments                        | 30               | 90               |

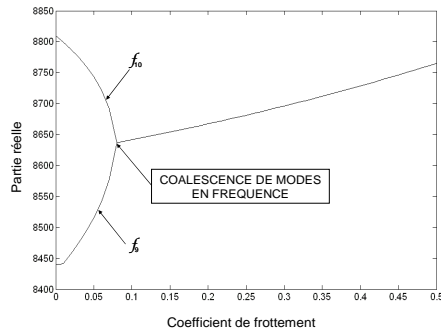
**Tableau I : Données du système étudié**

Dans les simulations présentées, le contact entre les deux poutres s'effectue au point A (figure 1). L'angle  $\beta$  est fixé à  $5^\circ$ .

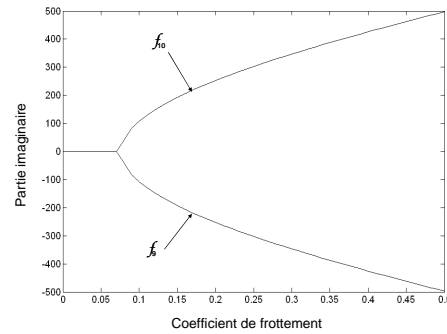
### 2.2. Approche fréquentielle

#### ▪ Résultats sans amortissement structural

Les figures 3 et 4 présentent l'évolution de la partie réelle et de la partie imaginaire des fréquences propres  $f_9$  et  $f_{10}$  en fonction du coefficient de frottement. Pour un coefficient de frottement nul, les deux fréquences sont distinctes, le système est donc stable. Pour  $\mu=0.08$ , on observe une coalescence de ces deux modes à la fréquence de 8640Hz et la valeur propre n°9 contient une partie imaginaire négative : ce mode est donc potentiellement instable lorsque le coefficient de frottement est supérieur à 0.08.



**Figure 3 : Partie réelle des fréquences  $f_9$  et  $f_{10}$  en fonction du coefficient de frottement**



**Figure 4 : Partie imaginaire des fréquences  $f_9$  et  $f_{10}$  en fonction du coefficient de frottement**

Les fréquences des poutres seules et couplées à  $\mu=0$  sont présentées dans le tableau 2. La figure 5 présente l'étude fréquentielle du système en fonction du coefficient de frottement. Pour des coefficients de frottement compris entre 0 et 0.5, on observe trois coalescences de modes (8 636 Hz, 16 688Hz, 28 820 Kz) à des coefficients de frottement différents, donc trois fréquences potentiellement instables.

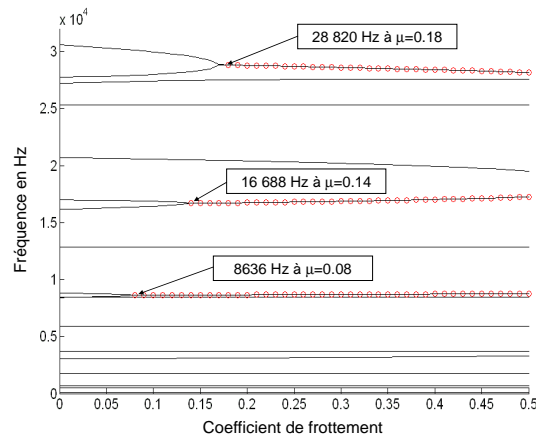
Le tableau II met en évidence que la coalescence de deux fréquences s'effectue pour des fréquences à  $\mu=0$  proches. De plus, la forme (non présentée ici) des deux modes correspondant à  $\mu=0$  est similaire. A titre d'exemple, les modes à 8484 Hz et 8889 Hz sont tous deux une combinaison du troisième mode de flexion (F3) de la poutre 1 et du sixième mode de flexion (F6) de la poutre 2, couplé à de la traction. La différence est un déphasage de  $180^\circ$  entre les deux modes concernés. Pour les trois autres cas, on observe également que les couples de modes mis en jeu dans l'instabilité ont une forme similaire.



| Poutre 1                 | Poutre 2       | Mode couplé à $\mu = 0$                   |
|--------------------------|----------------|---|
| 0 (mode de corps rigide) | 109 Hz (F1)    | 102 Hz                                    |
| 492 Hz (F1)              | 683 Hz (F2)    | 489 Hz                                    |
|                          |                | 660 Hz                                    |
|                          | 1913 Hz (F3)   | 1780 Hz                                   |
| 3077 Hz (F2)             | 3750 Hz (F4)   | <b>3030 Hz</b> } Instable à $\mu = 0.81$  |
|                          |                | <b>3733 Hz</b> } $f = 3621$ Hz            |
|                          | 6200 Hz (F5)   | 5935 Hz                                   |
|                          | 8840 Hz (T1)   | 8440 Hz                                   |
| 8614 Hz (F3)             | 9261 Hz (F6)   | <b>8427 Hz</b> } Instable à $\mu = 0.08$  |
|                          |                | <b>8809 Hz</b> } $f = 8636$ Hz            |
|                          | 12935 Hz (F7)  | 12870 Hz                                  |
| 16878 Hz (F4)            | 17222 Hz (F8)  | <b>16163 Hz</b> } Instable à $\mu = 0.23$ |
|                          |                | <b>16988 Hz</b> } $f = 16688$ Hz          |
|                          | 22122 Hz (F9)  | 20700 Hz                                  |
|                          | 25533 Hz (T2)  | 25325 Hz                                  |
| 27898 Hz (F4)            | 27636 Hz (F10) | <b>27764 Hz</b> } Instable à $\mu = 0.13$ |
|                          |                | <b>30617 Hz</b> } $f = 28820$ Hz          |
|                          |                | 35395 Hz                                  |

**Tableau II : Fréquences propres des deux poutres prises indépendamment l'une de l'autre et couplé à coefficient de frottement nul. ( $F_i = i^{\text{ème}}$  mode de flexion et  $T_i = i^{\text{ème}}$  mode de traction).**

Pour le système étudié, il y a donc deux conditions pour obtenir une coalescence entre deux modes. Ils doivent à la fois être proches en fréquence et avoir une forme similaire à  $\mu=0$ . Huang et al [21] ont montré en effet que la coalescence a lieu entre deux modes compatibles (forme et fréquence proches).



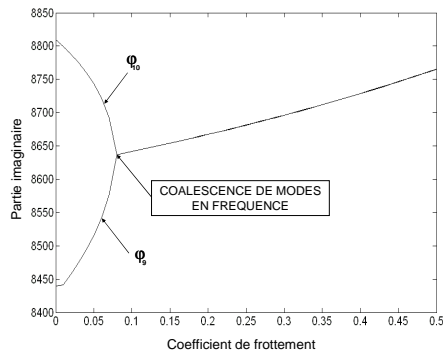
**Figure 5 : Evolution des 18 premières fréquences du système couplé par frottement en fonction du coefficient de frottement.  $\circ$  Fréquences possédant une partie imaginaire négative (donc potentiellement instables).**

#### ▪ Résultats avec amortissement structural

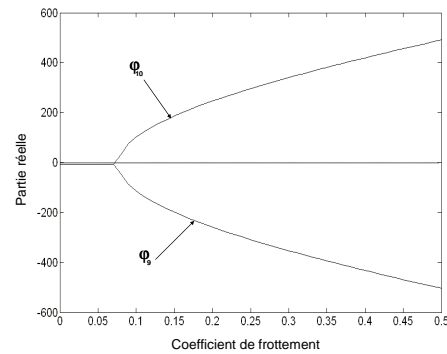
L'introduction d'amortissement proportionnel crée une dépendance du taux d'amortissement à la fréquence considérée. Le taux d'amortissement est donné par :

$$\varepsilon_{\%} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1}{\omega} + \alpha_2 \omega \right) \times 100 \quad (13)$$

$\varepsilon$  étant le taux d'amortissement et  $\omega$  la pulsation considérée.  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont données dans le tableau I. Par exemple, pour une fréquence de 8,7 kHz, le taux d'amortissement est d'environ 0,073% alors que pour une fréquence de 28,8 kHz, il est de 0,104%. Les figures 6 et 7 donnent l'évolution des valeurs propres correspondant aux modes considérés dans les figures 3 et 4. On retrouve la coalescence en fréquence des deux modes, même si les fréquences lors de la coalescence ne sont pas parfaitement confondues. Sur la partie réelle, on observe que l'amortissement introduit a pour conséquence de décaler vers les valeurs négatives la partie réelle de la valeur propre. Par conséquent, l'amortissement structural a pour effet de repousser l'instabilité vers des coefficients de frottement plus élevés. L'influence de l'amortissement modal a été étudiée expérimentalement par Massi et al. [22]. Ils montrent que l'introduction d'amortissement modal peut entraîner la disparition du crissement pour le mode amorti, mais peut parfois avoir pour conséquence d'augmenter le risque d'instabilité par frottement. Dans cette étude numérique, l'amortissement introduit est trop faible pour avoir une incidence visible sur le coefficient de frottement critique des fréquences instables.



**Figure 6 : Partie imaginaire des valeurs propres  $\varphi_9$  et  $\varphi_{10}$  en fonction du coefficient de frottement**



**Figure 7 : Partie réelle des valeurs propres  $\varphi_9$  et  $\varphi_{10}$  en fonction du coefficient de frottement**

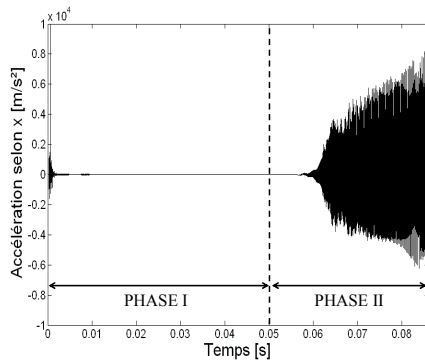
### 2.3. Approche temporelle

Les paramètres de la simulation présentée sont donnés dans le tableau III.

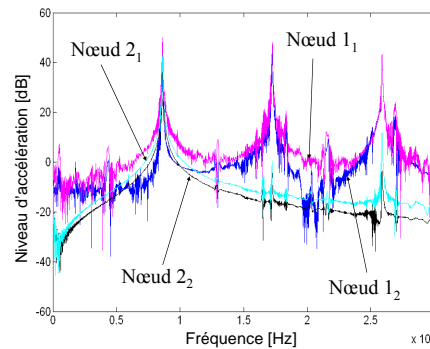
|  |           |
|--|-----------|
| Force appliquée (F)                            | 20 N      |
| Vitesse imposée (V)                            | 0.02m/s   |
| Coefficient de frottement de Coulomb ( $\mu$ ) | 0.1       |
| Pas de temps ( $\Delta T$ )                    | $2^e-8$ s |
| Amortissement numérique ( $\beta_2$ )          | 0.5       |

**Tableau III : Paramètres des simulations**

A l'instant initial, les poutres sont immobiles et ne sont pas en contact. La poutre 1 est alors mise en mouvement suivant y par la force F appliquée. Cette mise en contact des deux poutres provoque des vibrations qui s'atténuent grâce à l'amortissement structural introduit (Phase I : Mise en contact des deux poutres pour  $t \in [0\text{s}; 0,05\text{s}]$ ). Lorsque les deux poutres en contact sont en équilibre statique, on applique une vitesse suivant x à l'encastrement de la poutre 2, ce qui introduit un mouvement relatif entre les deux poutres (Phase II : Translation de la poutre 2 pour  $t \in [0,05\text{s}; 0,1\text{s}]$ ).



**Figure 8 : Accélération suivant x en fonction du temps pour le nœud esclave.**



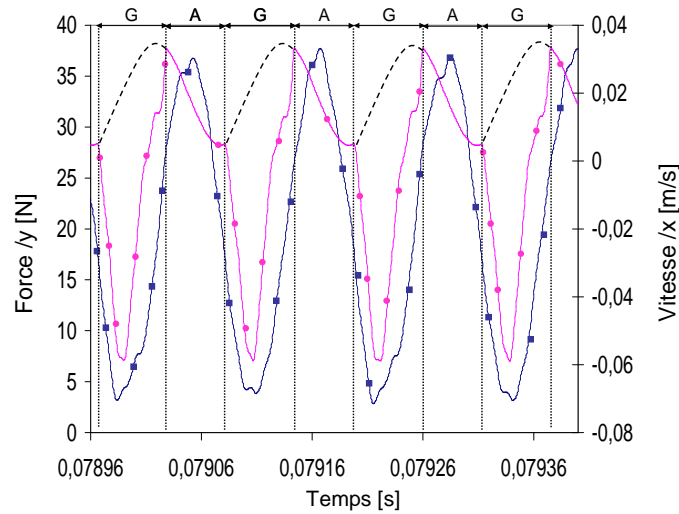
**Figure 9 : FFT de l'accélération suivant x pour deux nœuds appartenant à la poutre 1 (nœud n°1<sub>1</sub> et 1<sub>2</sub>), et deux nœuds appartenant à la poutre 2 (nœud n°2<sub>1</sub> et nœud n°2<sub>2</sub>)**

Le phénomène d'instabilité en temporel se traduit par un phénomène de vibrations auto-entretenues du système. La figure 8 présente les variations de l'accélération selon x du nœud esclave en fonction du temps pendant les deux phases de simulation. Lors de la première phase, on observe des oscillations évanescentes de l'accélération dues à la mise en contact des deux poutres ( $t \in [0\text{s} ; 0,05\text{s}]$ ). Lors de la deuxième phase, l'amplitude de l'accélération croît de façon exponentielle puis tend à se stabiliser.

La transformée de Fourier (figure 9) révèle une périodicité en fréquence. La fréquence fondamentale est de 8 700 Hz. Pour cette fréquence, le niveau d'accélération selon x des quatre nœuds étudiés est compris entre 40 et 55 dB. Les vibrations auto-entretenues se propagent dans les deux poutres.

L'apparition de vibrations auto-entretenues se manifeste par l'apparition d'ondes au niveau du contact : ces ondes sont du type adhérence–glissement, adhérence–glissement–décollement ou glissement–décollement [14]. Il y a donc localement des variations du statut cinématique (adhérent, glissant, décollé) du nœud esclave

par rapport à la surface de contact, des forces de contact (normales et tangentielles), des vitesses... Dans la simulation présentée, des ondes d'adhérence-glissement à la fréquence de 8 700Hz sont présentes au niveau du nœud esclave. La figure 10 présente l'évolution de la force de contact suivant y et de la vitesse suivant x (direction de glissement) sur trois périodes.



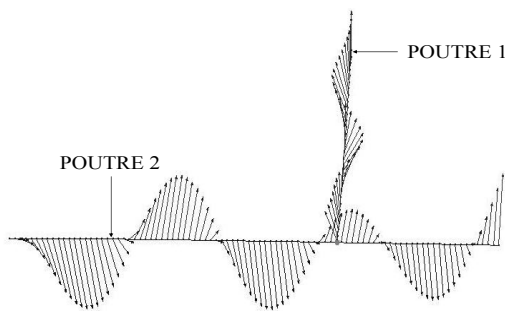
**Figure 10 : Force de contact suivant y et vitesse suivant x (direction du glissement) en fonction du temps sur trois périodes. Les ondes d'instabilités obtenues sont des ondes glissement (G) – adhérence (A).**

● : Vitesse /x du nœud 1 ■ : Force /y --- : Vitesse /x du point de contact sur la poutre 2

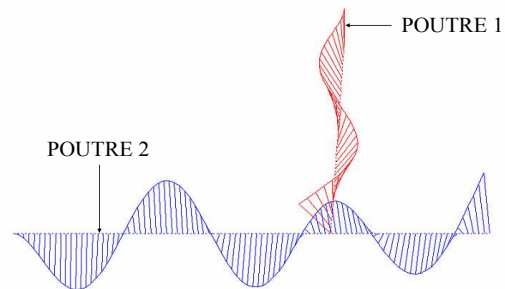
La force extérieure est de 20N, alors que la force de contact maximale est d'environ 37N. La vitesse imposée à la poutre 2 est de 0,02 m/s. Pendant les phases d'adhérence, la vitesse de glissement est nulle, mais la vitesse obtenue n'est pas constante et égale à 0,02m/s, à cause des vibrations locales selon x de la poutre 2. Pendant les phases de glissement, la vitesse relative maximale s'élève à 0,09 m/s. Les conditions locales de contact pendant l'instabilité sont donc plus sévères que celles imposées globalement.

## 2.4. Comparaison des résultats des deux approches

A  $\mu=0,1$ , les deux approches donnent les mêmes résultats : une seule fréquence instable à 8,7 kHz. Les figures 11 et 12 représentent l'allure des modes mis en jeu pour les deux approches. Les modes obtenus sont similaires : les deux poutres ont le même ordre de flexion sur les deux représentations.



**Figure 11 : Représentation du mode mis en jeu dans l'instabilité (par le vecteur vitesse aux nœuds). Résultat obtenu par l'approche temporelle. ( $V=0,02\text{m/s}$   $F=20\text{N}$  et  $\mu=0,1$ )**



**Figure 12 : Représentation en déplacement du mode n°9 à  $\mu=0,07$  (état stable), devenant instable à  $\mu=0,08$ . Résultat obtenu par l'approche fréquentielle.**

L'approche fréquentielle donne les fréquences potentiellement instables et l'approche temporelle indique laquelle (ou lesquelles) résonne (nt). Dans notre cas, l'approche temporelle donne des fréquences d'instabilités différentes suivant le coefficient de frottement. A chaque simulation temporelle effectuée, les fréquences d'instabilité correspondent à une des fréquences potentiellement instables obtenues par l'approche fréquentielle. Ce qui montre que les deux approches donnent des résultats cohérents. De plus, les deux approches donnent le coefficient de frottement critique d'instabilité à 0,08.

### 3. Conclusions

Le système modèle étudié permet de réaliser des études d'instabilités de frottement. Les deux approches fréquentielle et temporelle ont été programmées et comparées.

- L'approche fréquentielle peut donner plusieurs modes potentiellement instables. Ce phénomène se caractérise par une coalescence de deux modes qui à la fois sont proches en fréquence et ont la même allure.
- L'approche temporelle donne la ou les fréquences qui répondent réellement lorsqu'il y a instabilité. Pour le système étudié, des ondes périodiques de type glissement-adhérence, apparaissent au niveau du contact à la fréquence de 8,7kHz. Localement, les forces de contact et les vitesses sont différentes pendant l'instabilité, ce qui peut engendrer des conditions de contact plus sévères.
- Les deux approches donnent des résultats similaires : les instabilités obtenues par les deux approches mettent en jeu les mêmes fréquences. Les modes mis en jeu sont les mêmes. Pour ce système, les coefficients de frottement critiques d'instabilité sont égaux à 0.08 selon les deux approches.

La confrontation des résultats obtenus par les deux approches principalement utilisées pour les problèmes d'instabilité de frottement montre qu'elles offrent des résultats cohérents et qu'elles sont complémentaires.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Ibrahim R. A, Friction-induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos, Part I: Mechanics of Contact and Friction, ASME Applied Mechanics Reviews, Vol 47, (1994) 209-226.
- [2] Ibrahim R. A., Friction-induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos, Part II: Dynamics and Modeling, ASME Applied Mechanics Reviews, Vol 47 (1994) 227-253.
- [3] Akay A., Acoustic of Friction, Acoustic Society of America, (2002) 1525-1548.
- [4] Mills H. R., Brake Squeal, Institution of Automobile Engineers (1938).
- [5] Block H., Fundamental Mechanical Aspect of Boundary Lubrication, SAE Journal 46 (2) (1940) 54-68.
- [6] Spurr R. T., A Theory of Brake Squeal, Proceedings of the Automotive Division, Institution of Mechanical Engineers,(1961) pp 33-52.
- [7] North M., Disc Brake Squeal, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineering C38/76, (1976) pp 196-176.
- [8] Nishiwaki M., Generalized Theory of Brake Noise, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Mechanical Engineering Publication Limited, Suffolk England, (1993) pp 223-231.
- [9] Rudolph M., Popp K., Friction Induced Brake Vibration, in CD-ROM Proceeding of DETC'01, DETC2001/VIB-21509, ASME, Pittsburg, PA, (2001) pp 1-10.



- [10] Ouyang H., Mottershead J.E., Brookfield D. J., James S. and Cartmell M. P., A Methodology for the determination of Dynamic instabilities in a car disc Brake, International Journal of Vehicle Design, Special Issues on Brake Roughness, Noise, Vibration and Dynamics 23 (3/4), (2000) 241-262.
- [11] Flint J. and Hultén J., Lining-Deformation-Induced Modal Coupling as Squeal Generator in a Distributed Parameter Disc Brake Model, Journal of Sound and Vibration 254(1),(2002) 1-21.
- [12] Mottershead J. E., Chan S. N., Break Squeal – An Analysis of Symmetry and Flutter Instability, Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal and Chaos, ASME, (1992) DE-vol. 49.
- [13] Giannini O., 2001, A Experiments and modelling of squeal noise on a laboratory disc brake, P. h. D. thesis, University of Rome “La sapienza”(2001).
- [14] Baillet L., D'Errico S., Berthier Y., Influence of sliding contact local dynamics on global friction coefficient variation, Revue Européenne des Eléments Finis, Volume 14 – n° 2-3 (2005) 305 – 322.
- [15] Oanca V. G., Laursen T. A., Dynamics of a State Variable Frictional Law in Finite Element Analysis, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, (1996) 25-40.
- [16] Oanca V. G., Laursen T. A., Stability Analysis of State Dependent Dynamic Frictional Sliding, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol 32, Elsevier, (1997) 837-853.
- [17] Chern Y. J., Chen F., Swayze J. L., Non Linear Brake Squeal Analysis, SAE International (2002) 73-76.

- [18] Hendricx W., Garesci F., Pezzutto A., Van der Auweraer H., Experimental and numerical Modelling of Friction Induced Noise in Disc Brakes, SAE International, (2002,) 1566-1571.
- [19] Chargin M.L., Dunne L.W., Herting D.N., Nonlinear dynamics of brake squeal, Finite element in analysis and design,28 (1997) 69-82.
- [20] Carpenter N.J., Taylor R.L. et Kantona M.G., Lagrange constraints for transient finite element surface contact, Int. J. Numerical Methods Engineering 32 (1991) 103-128.
- [21] Huang J., Krousgrill C.M., Bajaj A. K., Modeling of automotive drum brakes for squeal and parameter sensitivity analysis, Journal of Sound and Vibration 289 (2006) 245-263.
- [22] Massi F., Sestieri A., Baillet L., The effect of modal damping on brake squeal instability, ICSV13 – Vienna, Vienna, Austria, 2006.